対称空間における境界値問題について (対称空間上の不変微分方程式)

大島, 利雄

数理解析研究所講究録
249巻 1975年 10-21

対称空間における境界値問題について

東大 理 大島利雄

連結実半単純リー群 G より作られた対称空間 X の G-不変微分作用素全体の作る環 $\mathbb{D}(X)$ は，X のランクに等しい数の生成元 $Q_1, \cdots, Q_k$ を持つ可換環である。固有値 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ に属する Q_i 達の同時固有函数のなす空間を $\mathcal{a}^\lambda(X)$ とおく．X の境界 B 上の *hyperfunction* のなす空間を $\mathcal{B}(B)$ とすると，ポアソン核 P_λ によるポアソン積分により，$\mathcal{B}(B)$ から $\mathcal{a}^\lambda(X)$ への写像が得られる． これが同型写像になるというのが Helgasson 予想であった． これに関し，岡本先生を中心とする表現論のグループと，佐藤先生を中心とする超函数のグループとの共同研究により一般的解決が試みられ，X のランクが1の場合は *generic* な λ に関して，最近一般的な証明がなされた．（以上に関しては，峰村・田中・岡本[2]）

ここでは，ランク2の例として，$SL(3,\mathbb{R})/SO(3,\mathbb{R})$ の場合に，Helgasson 予想が成立することを示そう。 ポアソン

積分の逆作用である"境界値をとる操作"が定義できることを示すと，あとは群論的手法により予想が証明できることはランク１の場合と同様である．（cf. 峰村－田中－岡本［2］）そこで，境界値をいかに定義するかということを中心にして以下話を進めていこう。

<u>記号</u>

M : n－次元実解析的多様体

　座標系 $(x_1,\cdots,x_n)=(x',x_n)$

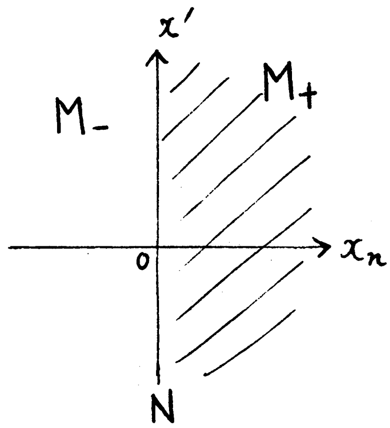
$N=\{x_n=0\}\subset M$ ：超平面

$M_\pm=\{x_n \gtrless 0\}\subset M$

$\mathcal{D}$: M上の微分作用素の環の層

$\mathcal{B}_M$: M上の hyperfunction の層

$\mathcal{B}_N$: N　〃　〃



X, Y をそれぞれ M, N の複素化とする．

・最初に普通の境界値問題を考えよう．

$$P = D_n^m + A_1(x,D')D_n^{m-1}+\cdots+A_m(x,D')$$

ここで，A_j は高々 j-階とする．$D_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$，$D'=(D_1,\cdots,D_{n-1})$ とおいた．

M上の $Pu=0$ を満たす超函数から，N上の超函数の m 個の直和への写像 $\gamma : \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}P\,;\mathcal{B}_{M_+})|_N \longrightarrow (\mathcal{B}_N)^m$ は次の様にして定義される．

まず，u が N の近傍まで定義されている場合．（又は，u が N の近傍で実解析的な場合を考えてもよい）

$$u^j(x') = \left.\frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}\right|_{x_n=0} \quad \text{とおく．}$$

$\tilde{u}(x) = u(x)Y(x_n)$ の台は $\overline{M_+}$ に入ることに注意しよう．

$$D_n(u(x)Y(x_n)) = u^0(x')\delta(x_n) + \frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot Y(x_n)$$

$$D_n^2(u(x)Y(x_n)) = u^0(x')\delta^{(1)}(x_n) + u^1(x')\delta(x_n) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\cdot Y(x_n)$$

etc.

と，$Pu = 0$ とから次式を得る．

$$P\tilde{u} = u^0(x')\cdot\delta^{(m-1)}(x_n) + (u^1(x') + A_1(x,D')u^0(x'))\cdot\delta^{(m-2)}(x_n)$$
$$+ (u^2(x') + A_1(x,D')u^1(x') + A_2(x,D')u^0(x'))\cdot\delta^{(m-3)}(x_n)$$
$$+ \cdots + (u^{m-1}(x') + \cdots + A_{m-1}(x,D')u^0(x'))\cdot\delta(x_n)$$

従って，

$$P\tilde{u} = \sum_{i=0}^{m-1} v^i(x')\cdot\delta^{(m-1-i)}(x_n) \quad \text{とおくことができ，}$$

(1) $$v^i(x') = u^i(x') + \sum_{1\le\nu\le i} R_\nu^i(x',D')u^{i-\nu}(x') \quad \text{と表わせる}$$

但し，$A_j(x,D') = \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{x_n^\tau}{\tau!} A_j^\tau(x',D')$

$$R_\nu^i(x',D') = \sum_{\tau=0}^{\nu-1} (-1)^\tau \frac{(m+\tau-1-i)!}{\tau!\,(m-1-i)!} A_{\nu-\tau}^\tau(x',D')$$

(1) の形を見れば，明らかに逆に解けることがわかり，

(2) $$u^i(x') = v^i(x') + \sum_{\nu=1}^{i} S_\nu^i(x',D')v^{i-\nu}(x') \quad \text{と表わせる}$$

$(u^0, \cdots, u^{m-1}) \in (\mathcal{B}_N)^m$ は境界値 $\gamma(u)$ と定義されるべきものだが，(1)，(2) があるので，$(u^0, \cdots, u^{m-1})$ の代わりに $(v^0, \cdots, v^{m-1})$ を $\gamma(u)$ と定義しても同じこと．
重要なことは $\gamma : u \longmapsto \gamma(u) \in (\mathcal{B}_N)^m$ なる写像が injective なこと．（u が実解析的の場合は Cauchy - Kowalevski の定理より明らか）

u が N の近傍で実解析的とは限らない場合でも，次の様にして境界値が定義される．（小松 - 河合 [5] による）

<u>補題 1</u>　$u \in \mathcal{B}_M(M_+)$ が $Pu = 0$ を満たすならば，
$\tilde{u} \in \mathcal{B}_M(M)$ が唯1つ存在して，次が成立する．

$$\begin{cases} ① \ \operatorname{supp} \tilde{u} \subset \overline{M_+}, \quad \tilde{u}|_{M_+} = u \\ ② \ P\tilde{u} = \sum_{i=0}^{m-1} v^i(x') \cdot \delta^{(m-1-i)}(x_n), \quad v^i \in \mathcal{B}_N \text{ と表わせる} \end{cases}$$

従って，
$$\begin{array}{ccc} \gamma : \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}P\,;\, \mathcal{B}_{M_+})|_N & \longrightarrow & (\mathcal{B}_N)^m \\ \psi & & \psi \\ u & \longmapsto & (v^0, \cdots, v^{m-1}) \end{array}$$
が定義される．（もちろん，(2) を用いて，v^i を $u^i = \left.\dfrac{\partial^i u}{\partial x_n^i}\right|_{x_n+0}$ に置き換えることもできる）

この場合も，Holmgren の定理（佐藤 [4]）により，γ が injective なことがわかる．

② の条件は，$x^m P\tilde{u} = 0$ と同じであるから，補題 1 は次の補題 1′ と同値である．

<u>補題 1′</u> $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}x^m P; \Gamma_{\overline{M_+}}(\mathcal{B}_M)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}x^m P; \mathcal{B}_{M_+})$

$$\| $$

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}P; \mathcal{B}_{M_+})$$

さて，ここで擬微分作用素を導入し，$x_0^* \in \sqrt{-1}S_N^* M$ で micro-local にみることにする．x_0^* では D_n は可逆になり，P の形から $E = D_n^{-m} P$ も可逆となる（擬微分作用素として）．$\tilde{u}$ を micro-function とみなせば（それを $sp(\tilde{u})$ と表わす）．

$x^m P\ sp(\tilde{u}) = x^m D_n^m (E\ sp(\tilde{u})) = 0$ であるから

$E\ sp(\tilde{u}) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{v^j(x')}{j!} x_{n+}^j$ と表わせ，次式を得る．

(3) $\quad sp(\tilde{u}) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} E^{-1}(x, D_x) \cdot v^j(x') x_{n+}^j \quad , v^j \in \mathcal{B}_N.$

表示 (3) により，$\gamma : \tilde{u} \longmapsto (v^0, \cdots, v^{m-1}) \in (\mathcal{B}_N)^m$ が定義される．これは先に定義された γ と同じものである．

従って，最初から P の代わりに $x^m P$ を考えて議論しても補題 1′ と表示 (3) とから γ が定義される．$x^m P$ の形の作用素をもっと一般化すれば，次の様な確定特異点型境界値問題が定義される．

<u>定義</u> M 上の微分方程式 $Pu = 0$ が N に関して，確定特異点型である．

$\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ $P = P(x_1, \cdots, x_n; x_n \frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, x_n \frac{\partial}{\partial x_n})$ の形をしていて，

P の階数を m, P の主シンボルを $\sigma_m(P) = P_m(x_1, \cdots, x_n; x_n\xi_1, \cdots, x_n\xi_n)$ とすると, $P_m(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0; 0, \cdots, 0, 1) \neq 0$ を満たす.

<u>定義</u> この時, $P(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0; 0, \cdots, 0, \lambda) = 0$ を P の決定方程式と言い, その根を $\lambda_1(x'), \cdots, \lambda_m(x')$ とおく.

簡単のため, $\lambda_i(x')$ と $\lambda_i(x') - \lambda_j(x')$ $(i \neq j)$ 達がどれも整数にならないと仮定しよう. この場合, 次の様にして境界値をとる操作 $\gamma : \mathcal{H}^0(M_+, \mathcal{B}_M^P)|_N \hookrightarrow (\mathcal{B}_N)^m$ が定義されることが, 柏原正樹氏により示された. (cf. 柏原 [1])
ここで, $\mathcal{B}_M^P = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}P; \mathcal{B}_M)$ とおいた. 即ち $\mathcal{B}_M^P$ は方程式 $Pu = 0$ の *solution sheaf* である.

γ は, 次の２つの補題により定義される.

<u>補題２</u> 次の制限写像は同型写像である.

$$\mathcal{H}^0_{\overline{M_+}}(M, \mathcal{B}_M^P) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0(M_+, \mathcal{B}_M^P)$$

<u>補題３</u> $\mathcal{H}^0_{\overline{M_+}}(M, \mathcal{B}_M^P) \hookrightarrow (\mathcal{B}_N)^m$

補題３は, $\tilde{u} \in \mathcal{H}^0_{\overline{M_+}}(M, \mathcal{B}_M^P)$ が $x_0^* \in \sqrt{-1}S_N^*M$ で

$$(4) \qquad sp(\tilde{u}) = \sum_{j=1}^{m} Q_j(x', D_x) \cdot w^j(x')\, x_{n+}^{\lambda_j(x')}.$$

$(w^j \in \mathcal{B}_N,\ Q_j(x', D_x)$ は擬微分作用素$)$

と表示されることに基づいている. (cf. (3) の表示)

(4) の表示は，$\mathrm{ord}\, Q_j = 0$，$[D_n, Q_j] = 0$，$\sigma(Q_j)|_{P_Y^* X} \equiv 1$ という normalization で unique となり，補題3は，$\tilde{u}$ に対し，$(w^1, \cdots, w^m)$ を対応させる写像として定義される．

上の2つの補題については，大島 [3] を参照．

さて，ランク1の対称空間 X 上の不変微分作用素（＝ラプラシアン）Δ は，境界 B に対して確定特異点型になっていることが証明される．従って，X 上の函数で，固有値 α に属する Δ の固有函数について，その境界値が定義される．この場合 2個（＝Δ の階数 = ワイル群の階数）の境界値が定義されるが，それぞれに関してポアソン積分が存在し，どちらのポアソン積分に関しても（i.e. どちらの境界値に対しても）Helgasson 予想が証明される．（cf. 峰村-田中-岡本 [2]）．　対称空間の場合は，群による不変性から決定方程式の根は，常に定数となっている．

最後に，$X = SL(3, \mathbb{R})/SO(3, \mathbb{R})$ の場合を考察する．X のランクは2で，不変微分作用素は，2個の生成元 L_2, L_3 を持つ．　ワイル群の order = (order L_2) × (order L_3) = 6 個の境界値が定義できるはずである．　境界 B の余次元 = X のランク = 2 である．

$$\left.\begin{array}{l} G = SL(3, \mathbb{R}) \\ \mathbb{R}^6 = \{A \in M(3, \mathbb{R})\,;\ {}^tA = A\} \end{array}\right)$$ とおく．

$g(A) = gA\,{}^t g$ により，G は $\mathbb{R}^6$ に作用する．

$S^5 = \mathbb{R}^6 / \mathbb{R}^+$ として，G は S^5 に作用する．

$$\rotatebox{90}{$\in$}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & u & v \\ u & u^2+x & uv+y \\ v & uv+y & v^2+z \end{pmatrix}$$ とおくと

対称空間 X は $\{A \in S^5 ; xz - y^2 > 0\}$ と表わせる．

L_2, L_3 は次の形であることが，峰村勝弘氏により計算された．

$$\begin{aligned} L_2 = & -\tfrac{1}{4} x D_u^2 - \tfrac{1}{2} y D_u D_v - \tfrac{1}{4} z D_v^2 \\ & - x^2 D_x^2 - 2xy D_x D_y - (xz+y^2) D_x D_z - \tfrac{1}{4}(xz+3y^2) D_y^2 \\ & - 2yz D_y D_z - z^2 D_z^2 - \tfrac{1}{2}(x D_x + y D_y + z D_z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_3 = & (y^2 - xz) \Big\{ \tfrac{1}{4}(D_u^2 D_z + D_v^2 D_x - D_u D_v D_y) \\ & + (x D_x + y D_y + z D_z + 1)(D_x D_z - \tfrac{1}{4} D_y^2) \Big\} \end{aligned}$$

ここで，次の変数変換を行なう．

$$\begin{cases} x = t, & y = tw, & z = t(w^2 + s) \\ t = x, & w = \dfrac{y}{x}, & s = \dfrac{1}{x^2}(xz - y^2) \end{cases}$$

対称空間は $X = \{s > 0,\ t > 0\} \subset M = \{(s, t, u, v, w)\}$

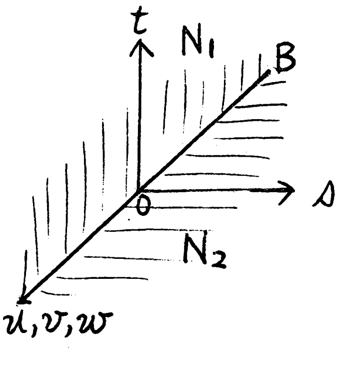
となり，$B = \{s = 0,\ t = 0\}$ となる．

$M_{1+} = \{s > 0\}$ ，$N_1 = \{s = 0\}$

$M_{2+} = \{t > 0\}$ ，$N_2 = \{t = 0\}$

とおけば，

$X = M_{1+} \cap M_{2+}$ ，$B = N_1 \cap N_2$



新しい変数で，

$$L_2 = -(tD_t)^2 + (sD_s)(tD_t) - (sD_s)^2 + \frac{1}{2}tD_t + \frac{1}{2}sD_s$$
$$- \frac{1}{4}(sD_w^2 + tD_u^2 + 2twD_uD_v + t(s+w^2)D_v^2)$$

$$L_3 = -(sD_s)(tD_t)^2 + (sD_s)^2(tD_t) - (sD_s)^2 + \frac{1}{2}(sD_s)(tD_t) + \frac{1}{2}sD_s$$
$$+ \frac{1}{4}\{(s(tD_t) - s)D_w^2 - (sD_s)tD_u^2 + (stD_w - 2tw(sD_s))D_uD_v$$
$$-(st(tD_t) - stwD_w + t(w^2 - s)(sD_s))D_v^2\}$$

となり，決定方程式は，

$$L_2 - \alpha \ : \ -\mu^2 + \lambda\mu - \lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu - \alpha = 0$$

$$L_3 - \beta \ : \ -\lambda\mu^2 + \lambda^2\mu - \lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda\mu + \frac{1}{2}\lambda - \beta = 0$$

その根を $(\lambda,\mu) = (\lambda_1,\mu_1), \cdots, (\lambda_6,\mu_6)$ としよう．

ここでも簡単のため，$\lambda_i, \mu_i, (\lambda_i - \lambda_j, \mu_i - \mu_j)$ $(i \neq j)$ はいずれも整数※でないと仮定する．　次の方程式

$$\mathcal{M}_{\alpha,\beta} : \begin{cases} (L_2 - \alpha)u = 0 \\ (L_3 - \beta)u = 0 \end{cases}$$

の解の層を $\mathcal{B}_M^{\mathcal{M}_{\alpha\beta}} = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}(L_2-\alpha) + \mathcal{D}(L_3-\beta) ; \mathcal{B}_M)$ とおく．

$\mathcal{M}_{\alpha,\beta}$ の解 $\tilde{u} \in \mathcal{B}_M(M)$ で，$supp(\tilde{u}) \subset \overline{X}$ を満たすものは，

(5) $$sp(\tilde{u}) = \sum_{j=1}^{6} Q_j(u,v,w; D_s, D_t, D_u, D_v, D_w) \cdot f_j(u,v,w)\, s_+^{\lambda_j} t_+^{\mu_j}$$

（Q_j は 0 階の擬微分作用素，$f_j \in \mathcal{B}_B(B)$）

の様に，$\sqrt{-1}S_B^*M - (\sqrt{-1}S_{N_1}^*M \cup \sqrt{-1}S_{N_2}^*M)$ で *micro-local* に

※ 又は 整数×整数の元

表示されることが，(イ)の場合と同様に証明される．この場合も，ロの表示は，$[D_s, Q_j] = [D_t, Q_j] = 0$，$\sigma_0(Q_j)(u,v,w;1,1,0,0,0) \equiv 1$ という normalization で unique になる．従って，$\tilde{u} \longmapsto (f_1,\cdots,f_6) \in (\mathcal{B}_B(B))^6$ という写像が定義でき，補題3に対応する部分は，この場合も成立する．

次に補題2に対応する部分を示そう．

$$
\begin{aligned}
P_{\alpha\beta} &= sD_s(L_2-\alpha) - (L_3-\beta) \\
&= -(sD_s)^3 + \frac{3}{2}(sD_s)^2 - (\alpha+\frac{1}{2})sD_s + \beta \\
&\quad - \frac{s}{4}\{2tD_wD_uD_v - (t^2D_t - twD_w - 2t(sD_s) + t)D_v^2 \\
&\qquad + (tD_t + sD_s)D_w^2\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{\alpha\beta} &= (tD_t-1)(L_2-\alpha) + (L_3-\beta) \\
&= -(tD_t)^3 + \frac{3}{2}(tD_t)^2 - (\alpha+\frac{1}{2})tD_t + (\alpha-\beta) \\
&\quad - \frac{t}{4}\{(tD_t+sD_s)D_u^2 + (2w(tD_t+sD_s) - sD_w)D_uD_v \\
&\qquad + ((2s+w^2)tD_t + (w^2-s)sD_s - swD_w)D_v^2\}
\end{aligned}
$$

とおくと，u が $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ の解ならば，$P_{\alpha\beta}u = Q_{\alpha\beta}u = 0$ を満たす． s, t を s^3, t^3 に置き換えれば，$P_{\alpha\beta}$, $Q_{\alpha\beta}$ はそれぞれ，N_1, N_2 に関し確定特異点型になっている．
従って，補題2を使えば，次の制限写像

$$
\mathcal{H}^0_{\overline{M_{i+}}}(M, \mathcal{B}_M^{\mathcal{M}_{\alpha\beta}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0(M_{i+}, \mathcal{B}_M^{\mathcal{M}_{\alpha\beta}}) \qquad i=1,2
$$

が同型写像であることがわかる． 従って，$^\forall u \in \mathcal{H}^0(X, \mathcal{B}^{\mathcal{M}_{\alpha\beta}})$ に対し，唯1つの $\tilde{u} \in \mathcal{H}^0_{\overline{X \setminus B}}(M\setminus B, \mathcal{B}_M^{\mathcal{M}_{\alpha\beta}})$ が存在

して，$\widetilde{u}|_X = u$ を満たすことがわかる． hyperfunction の flabbyness により，$\widetilde{u}$ を $\widetilde{\widetilde{u}} \in \mathcal{B}_M(M)$ に拡張すれば，$(L_2-\alpha)\widetilde{\widetilde{u}}$，$(L_2-\beta)\widetilde{\widetilde{u}}$ の support は B の中に入る．ここで，次の補題4を使えば，$\widetilde{\widetilde{u}} + v \in \mathcal{H}^0_X(M, \mathcal{B}_M^{\mathcal{M}\alpha\beta})$ を満たし，さらに $supp(v) \subset B$ となる $v \in \mathcal{B}_M(M)$ が唯1つ存在することが言える． 従って，次の同型が証明できた．

$$\mathcal{H}^0_X(M, \mathcal{B}_M^{\mathcal{M}\alpha\beta}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0(X, \mathcal{B}_M^{\mathcal{M}\alpha\beta})$$

以上を合わせれば，γ が定義できる．

<u>補題4</u> $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}(L_2-\alpha)+\mathcal{D}(L_3-\beta)\,;\,\Gamma_B(\mathcal{B}_M)) = 0$

補題4の証明は，補題2の証明の途中に使われる lemma を境界の余次元が高い場合にそのまま拡張すればよい．

さて，ランクが k (≥ 2) の一般の対称空間の場合，

$X = \{t_1>0, \dots, t_k>0\} \subset M = \{(t_1, \cdots, t_k, x_1, \cdots, x_\ell)\}$

$B = \{t_1 = \cdots = t_k = 0\} = \partial X$ と表現される．

不変微分作用素全体の作る環 $\mathbb{D}(X)$ の生成元 $Q_1, \cdots, Q_k$ と $1 \leq {}^\forall i \leq k$ に対し，$P_i = \sum_{j=1}^{k} S^i_j (Q_j - \alpha_j)$ $(P_i, S^i_j \in \mathcal{D}_M$, $\alpha_j \in \mathbb{C})$ と表わせる微分作用素で，$N_i = \{t_i = 0\}$ に対して確定特異点型になっているものが存在することを示すことができれば，$SL(3,\mathbb{R})/SO(3,\mathbb{R})$ の場合と同様に，境界

値を定義する写像 γ が構成でき，Helgasson 予想が証明される．

References

柏原正樹 [1]： 1974年 4月 の学会での講演

峰村勝弘，田中誠，岡本清郷 [2]：ランク1の対称空間上のディリクレ問題，本講究録．

大島利雄 [3]： Maximally degenerate な台を持つ擬微分方程式について，1974年 7月1日～4日 数理解析研究所で行なわれたシンポジウム"代数解析学とその応用"の講究録に掲載予定．

佐藤幹夫 [4]： 超函数の構造について，数学の歩み，<u>15</u> (1970)，9-72．（柏原正樹記）

小松彦三郎，河合隆裕 [5]：Boundary values of hyperfunction solutions of linear partial differential equations, Publ. Res. Inst. Math. Sci., <u>7</u> (1971), 95-104.